Agronomická fakulta

23. února 2018, Brno
Připravil: Ing. Robert Rouš

MRTOHK

Mendelova univerzita v Brně

Obsah

Zakladatel – Norbert Wiener (1894–1964)

Kybernetika – definice 1

je věda, která se zabývá obecnými principy řízení a přenosu informací ve strojích a živých organismech

Kybernetika – definice 2

je věda o složitých systémech a procesech, jejich modelování řízení a přenosu informace

- **Teoretická kybernetika** – obecné vlastnosti a chování systémů (teorie systémů, teoretická informatika)
- **Aplikovaná kybernetika** – uplatňuje kybernetický přístup při analýze, modelování, simulaci a návrhu systémů
  - Technická kybernetika
  - Biokybernetika
  - Informatika
  - a jiné

Technická kybernetika

- Dynamické systémy – zpětná vazba, stavový popis, teorie řízení aj.
- Přenos informace – entropie, kapacita informačního kanálu aj.
- Umělá inteligence – strojové učení, multi-agentní systémy, ANN aj.
- Teorie rozhodování – teorie her, složitosti, chaotické systémy aj.

Systém – definice 1

Systém je omezená část (reálného nebo abstraktního) prostoru s jasně vymezenou hranicí mezi ním a okolím.

Systém – definice 2

Systém je soubor (reálných nebo abstraktních) objektů svázaných takovým způsobem, že tvoří celek.

Systém – definice 3

Systém je uspořádanou množinou prvků, mezi nimiž působí vzájemné vazby (vztahy, relace), v jejichž důsledku je docilováno takového chování celku vůči okolí, které není dosažitelné působením pouhého souboru jeho vzájemně neprovázaných prvků.

1. Fyzikální systém
2. Abstraktní systém – např. diferenciální rovnice (musí mít řešení)
3. model systému a simulace

příklad RC

Pomocí (statické) převodní charakteristiky

- lineární
- nelineární (příklad)
  - nasycení (saturace)
  - vůle v převodech (mechanické systémy)
  - hystereze
  - relé

Další...

- Spojité – se spojitým časem
- Nespojité – s diskrétním časováním

Linear **T**ime **I**nvariant system (Lineární časově invariantní)

- Linear – statická převodní charakteristika je lineární
- Time Invariant – vlastnosti systému se v průběhu času nemění (rovnice s konstantními koeficienty)
- spojité systémy
- LTI systémy vyžadují počáteční podmínku

Princip superpozice

pro lineární systém se odezva na vstupní signál zkoumá jako součet dílčích odezev na jednotlivé složky vstupního signálu

odezva na vstup $u_1 \approx y_1$, $u_2 = k \cdot u_1$, potom oodezva $u_2 \approx y_2$ je $y_2 = k \cdot y_1$

Podle počtu vstupů a výstupů

- **SISO** – **S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput
- **MIMO** – **M**ultiple **I**nput **M**ultiple **O**utput

Řízení

Řízení je cílené působení na řízený objekt tak, aby se dosáhlo určitého předepsaného cíle.

Podle toho jak provádíme:

- ruční
- automatické
  - přímé
  - nepřímé

Ovládání

řízení bez zpětné kontroly – bez zpětné vazby

Regulace

řízení se zpětnou vazbou. Regulace je udržování určité fyzikální veličiny na konstantní hodnotě nebo jinak podle nějakého pravidla se měnící hodnotě. Během regulace se odstraňuje odchylka mezi požadovanou hodnotou a aktuální měřenou hodnotou řízené veličiny.

Vyšší formy řízení

- optimální řízení
- adaptivní řízení
- učící se systémy
- UI

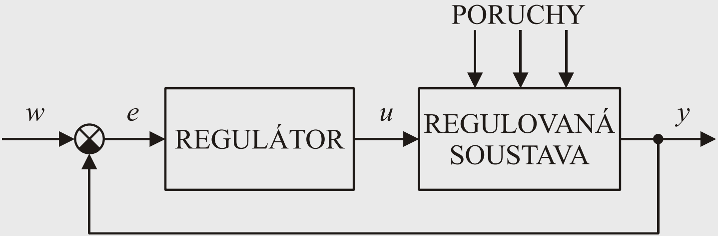
Automatické řízení podle způsobu uskutečnění:

- logické
- spojité
- diskrétní
- fuzzy

- Regulace se uskutečňuje v regulačním systému zvaném **regulační obvod**
  - **regulátor** a **regulovaná soustava**
- veličina vystupující z regulované soustavy je **regulovaná veličina** – y
- **žádaná veličina** – w – veličina pomocí které nastavujeme hodnotu které má dosahovat regulovaná veličina
- **regulační odchylka** – $e = w - y$
- výstupní veličinou regulátoru je **akční veličina** – u
- do systému vstupují **poruchové veličiny** – $v_1 ... v_n$

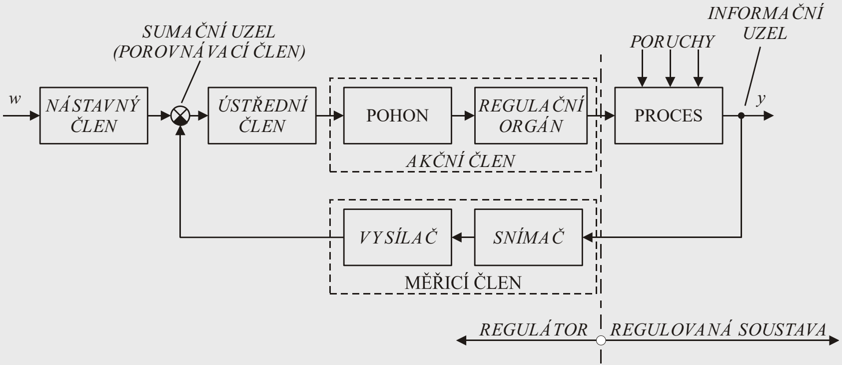
Spojité lineární řízení – příklad

- příklad plovák ...



Obrázek 1: Regulační schéma

Spojité lineární řízení



Obrázek 2: Regulační schéma

Regulátor není jeden prvek, skládá se z:

- **měřicí člen** (čidlo, snímač)
- **ústřední člen**
- **akční člen** (pohon, servomotor)

měřicí člen

- zjišťuje skutečnou hodnotu regulované veličiny
- u elektrických regulátorů ji převádí na elektrické napětí a vytváří regulační odchylku
- skládá se z
  - převodníku řídicí veličiny
  - snímače s převodníkem řízené veličiny
  - porovnávacího členu
- regulační obvod nemůže regulovat přesněji než je přesnost čidla

ústřední člen

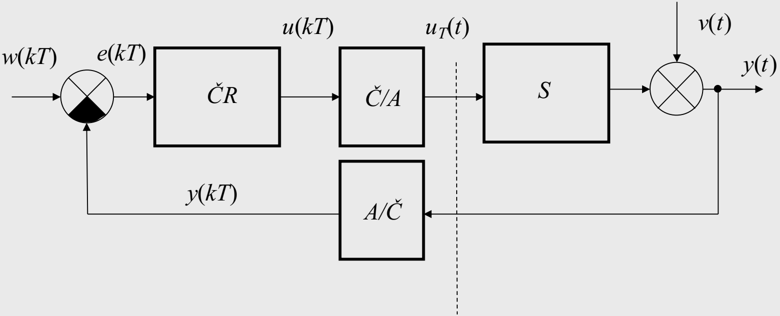
- zpracovává regulační odchylku
- může ji zesilovat, integrovat, derivovat
- jako **regulátor** se často v užším slova smyslu označuje právě ústřední člen
- hledáme u něj takové parametry, které zajistí vyhovující vlastnosti celého obvodu

akční člen

- skládá se z pohonu a regulačního orgánu
- pohon dodává energii regulačnímu orgánu
- regulační orgán přímo ovládá akční veličinu
- u regulačního orgánu požadujeme lineární závislost mezi polohou pohonu a akční veličinou

Pro zjednodušení blokového schématu zahrnujeme přenos čidla do přenosu regulované soustav, stejně tak přenos pohonu regulačního orgánu (pokud se nedají zanedbat).

Číslicové regulátory



Obrázek 3: Regulační schéma

Základní vlastnosti AD převodníků

- bitová hloubka
- vzorkovací frekvence
- vstupní rozsah

Shannon-Kotělnikův teorém (Nyquist-Shannon)

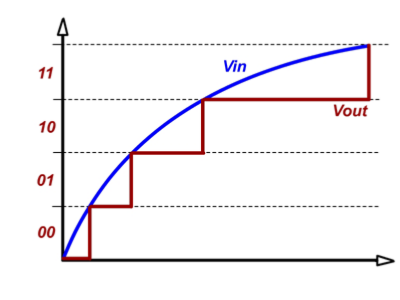
Frekvence vzorkování musí být alespoň 2 krát vyšší, než nejvyšší kmitočty (spektrální složky) vzorkovaného signálu, aby nedošlo ke zkreslení přeložením spekter, tzv. **aliasingu**.

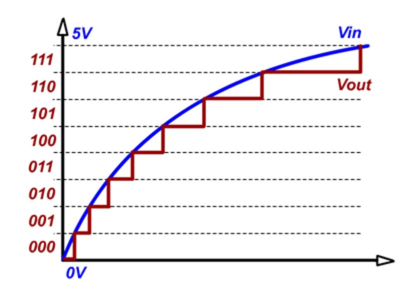
$$f_s \geq 2f_{max} \tag{1}$$

Aliasing – přeložení v časové oblasti se projevuje chybnou interpretací kmitočtu vyššího, než dvojnásobek vzorkovacího. Tento vyšší kmitočet se „přeloží“ zrcadlově vůči vzorkovacímu kmitočtu do nižší spektrální oblasti – bude se jevit, jako nižší.

▸ Link

AD převodníky – kvantování





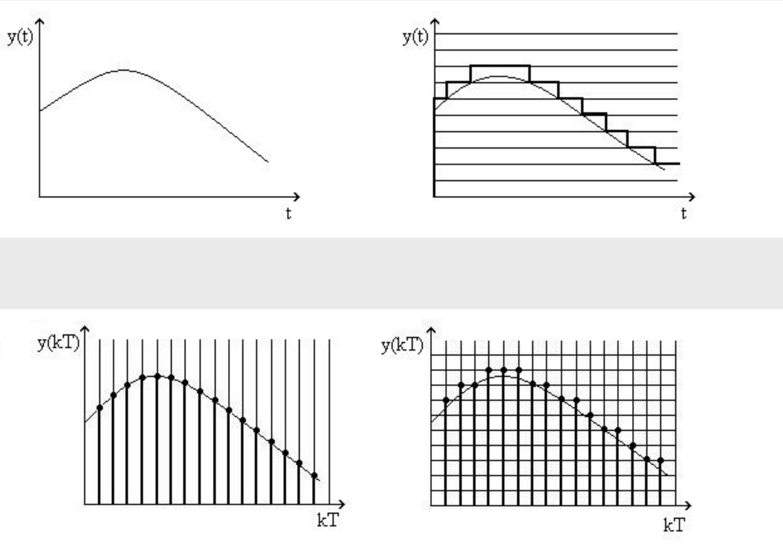
MCP3425

Třídění signálů

Signály lze rozdělovat na:

- spojité v čase (v každém časovém okamžiku víme jakou hodnotu má signál)
  - spojité v úrovni – analogový signál
  - diskrétní v úrovni – kvantovaný signál (Č/A převodníky)
- diskrétní v čase (hodnotu signálu víme pouze v násobku vzorkovací periody)
  - spojité v úrovni – diskrétní signál získaný vzorkováním
  - diskrétní v úrovni – číslicový signál (A/Č převodník, měřící karty)

Třídění signálů



Logické řízení

je cílená činnost, při níž se logickým obvodem zpracovávají informace o řízeném procesu a podle nich ovládají příslušná zařízení tak, aby se dosáhlo předepsaného cíle.

Vnější popis systému:

a) Diferenciální rovnice
b) Přenos systému (transfer function)
c) Přechodová charakteristika (step)
d) Impulsní charakteristika
e) Kořeny systému (póly a nuly)
f) Frekvenční přenos
g) Frekvenční charakteristika v $\mathbb{C}$
h) Logaritmická frekvenční charakteristika

Vnitřní popis systému:

- Stavový prostor (state space)

obecná diferenciální rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + \ldots + b_1 u' + b_0 u \tag{2}$$

$\forall a_i$ a $\forall b_j$ platí, že jsou konstanty

fyzikální podmínka realizovatelnosti

$$m \leq n \tag{3}$$

Řád diferenciální rovnice n (nejvyšší derivace výstupní veličiny $y(t)$) udává **řád systému**.

Laplaceova transformace

- matematický aparát umožňující poměrně snadno řešit úlohy spojité lineární regulace
- **transformací** diferenciální rovnice dostaneme rovnici algebraickou
- řešením a zpětnou transformací získáme hledané řešení původní rovnice
- v teorii regulace pro jednoduchý popis lineárních spojitých systémů (vnější popis systému – **přenos**)

- originál $\rightarrow$ obraz – **přímá transformace**
- obraz $\rightarrow$ originál – **zpětná transformace**

Definice Laplaceovy transformace

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \tag{4}$$

funkce $f(t)$ je po částech hladká a má nulovou hodnotu pro $t < 0$. Laplaceova transformace L přiřazuje funkci $f(t)$ pro čas $t \geq 0$ funkci $F(s)$, což zapisujeme symbolicky:

$$L\{f(t)\} = F(s) \tag{5}$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \tag{6}$$

Definice Laplaceovy transformace – pokr.

Zpětnou transformaci lze provést vztahem pro výpočet originálu k danému obrazu

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{c} F(s) e^{st} ds \tag{7}$$

tedy vyčíslováním křivkového integrálu po uzavřené křivce c, která v sobě uzavírá všechny singulární body funkce $F(s)$. Vyčíslování je možné provést residuovou větou.

- pro hledání obrazu ani originálu se kvůli pracnosti vztahy (4) a (7) nepoužívájí
- běžně používáme **slovník Laplaceovy transformace**

Slovník Laplaceovy transformace

	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
2	$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
3	a	$\frac{a}{s}$	$sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	$cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
5	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$

pro $F(s) = L\{f(t)\}$ eventuálně $G(s) = L\{g(t)\}$

Hlavní věty transformace

věta o linearitě

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s) \tag{8}$$

věta o obrazu derivace

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \tag{9}$$

věta o obrazu n-té derivace

$$L\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0) \tag{10}$$

Hlavní věty transformace

věta o obrazu integrálu

$$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s) \tag{11}$$

věta o počáteční hodnotě

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{12}$$

věta o konečné hodnotě

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{13}$$

Hlavní věty transformace

věta o posunutí

$$L\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{14}$$

příklady...

Přenos systému

- přenos je nejčastěji užívaným způsobem popisu lineárních regulačních systémů
- je definován jako poměr Laplaceova obrazu výstupní veličiny ku Laplaceovu obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách

Přenos systému

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{15}$$

Transformací diferenciální rovnice regulačního členu získáme

Přenos z diferenciální rovnice

$$Y(s)[a_n s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + ... + a_1 s + a_0] = U(s)[b_m s^m + ... + b_1 s + b_0] \tag{16}$$

dosazením do rovnice přenosu

$$G(s) = \frac{b_m s^m + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + ... + a_1 s + a_0} \tag{17}$$

Tvary přenosu

přenos s vyjádřenými nulami a póly

$$G(s) = k\,\frac{(s-n_1)(s-n_2)...(s-n_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)} \tag{18}$$

přenos s časovými konstantami

$$G(s) = K\,\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)...(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)...(T_n s+1)} \tag{19}$$

kde časové konstanty

$$\tau_i = -\frac{1}{n_i}; \quad T_i = -\frac{1}{p_i} \tag{20}$$

Impulsní funkce a charakteristika

Impulsní funkce je odezva systému na **jednotkový (Diracův) impuls** $\delta(t)$ na vstupu a značíme ji $g(t)$. Její graf je **impulsní charakteristika**.

Jednotkový impuls

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t \neq 0 \end{cases} \tag{21}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{22}$$

$$L\{\delta(t)\} = 1 \tag{23}$$

Vztah mezi přenosem a impulsní funkcí

Dosadíme-li do definice přenosu

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{24}$$

za vstup $u(t)$ jednotkový impuls $\delta(t)$ jehož obraz je roven jedné (23) je výstup $y(t)$ rovna právě této funkci.

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} \tag{25}$$

Mezi impulsní funkcí a přenosem je vztah jako mezi originálem a obrazem v Laplaceově transformaci.

Přechodová funkce a charakteristika

Přechodová funkce je odezva systému na **jednotkový skok** $\eta(t)$ na vstupu a značíme ji $h(t)$. Její graf je **přechodová charakteristika**.

Jednotkový skok

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases} \tag{26}$$

$$L\{\eta(t)\} = \frac{1}{s} \tag{27}$$

Přechodová charakteristika

- lze získat snadno experimentálně
- využití k **identifikaci systémů** pro zjištění dynamických vlastností, kde selhává jiný způsob identifikace

Přechodová funkce a ostatní popisy

$h(t)$ z $G(s)$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \tag{28}$$

$h(t)$ z $g(t)$

$$h(t) = \int_0^t g(t)dt \tag{29}$$

$g(t)$ z $h(t)$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \tag{30}$$

Přechodová charakteristika pro $t \to \infty$

$$h(\infty) = \lim_{s \to \infty} \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{b_0}{a_0} \tag{31}$$

Na základě ustálené hodnoty přechodové charakteristiky ($t \to \infty$) můžeme rozdělit regulační členy na tři základní skupiny:

- statické (proporcionální) $a_0 \neq 0 \wedge b_0 \neq 0$
- astatické (integrační) $a_0 = 0 \wedge b_0 \neq 0$
- derivační $a_0 \neq 0 \wedge b_0 = 0$

obrázek

Rozdělení základních regulačních členů

- Je-li možné **v čitateli** vytknout s^2, s^3 ... bude se jednat o členy **derivační** druhého, třetího, ... řádu s příslušnou setrvačností.
- Je-li možné **ve jmenovateli** vytknout s^2, s^3 ... bude se jednat o členy **integrační** druhého, třetího, ... řádu s příslušnou setrvačností.

Regulační členy

člen	ideální	se setrvačností 1. řádu
proporcionální	$G(s) = k$	$G(s) = \frac{k}{Ts+1}$
derivační	$G(s) = ks$	$G(s) = \frac{ks}{Ts+1}$
integrační	$G(s) = \frac{k}{s}$	$G(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}$

Regulační členy

člen	se setrvačností 2. řádu	obecný
prop.	$G(s) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$
derivační	$G(s) = \frac{ks}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$G(s) = \frac{s^r (b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0)}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$
integrační	$G(s) = \frac{k}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^q (a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0)}$

celá tabulka + příklad

Proporcionální členy

- proporcionální člen bez setrvačnosti (ideální proporcionální člen)
- proporcionální člen se setrvačností 1. řádu (aperiodický člen 1. řádu)
- proporcionální člen se setrvačností 2. řádu
  - aperiodický člen 2. řádu
  - mezní aperiodický člen 2. řádu
  - kmitavý člen 2. řádu
  - konzervativní člen 2. řádu (bezztrátový)
- obecný proporcionální člen se setrvačností n-tého řádu, $n \geq m$

Integrační členy

$$G(s) = \frac{b_m s^m + ... + b_1 s + b_0}{s^q(a_n s^n + ... + a_1 s + a_0)} \tag{32}$$

- integrační člen bez setrvačnosti (ideální integrační člen)
- integrační člen se setrvačností 1. řádu (reálný integrační člen)
- integrační člen 2. řádu se setrvačností 1. řádu
- obecný integrační člen q-tého řádu se setrvačností n-tého řádu, $n + q \geq m$

Derivační členy

$$G(s) = \frac{s^r(b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0)}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} \tag{33}$$

- derivační člen bez setrvačnosti (ideální derivační člen)
- derivační člen se setrvačností 1. řádu (reálný derivační člen)
- obecný derivační člen r-tého řádu se setrvačností n-tého řádu, $n \geq m + r$

Proporcionální systémy 2. řádu

proporcionální člen se setrvačností 2. řádu

$$G(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \tag{34}$$

ξ – **součinitel poměrného tlumení** – podle jeho velikosti rozlišujeme několik možných přechodových funkcí

aperiodický člen 2. řádu

$$\xi > 1: \quad G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \tag{35}$$

Proporcionální systémy 2. řádu

mezní aperiodický člen 2. řádu

$$\xi = 1 : \quad G(s) = \frac{k}{(Ts+1)^2} \tag{36}$$

kmitavý člen 2. řádu – jmenovatel nelze rozložit

$$0 < \xi < 1 : \quad G(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} \tag{37}$$

konzervativní člen 2. řádu (bezztrátový)

$$\xi = 0 : \quad G(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 1} \tag{38}$$

proporcionální systémy – příklad

proporcionální se setrvačností 1. řádu

$$G_1(s) = \frac{10}{3s+1} \tag{39}$$

aperiodický člen 2. řádu

$$G_{21}(s) = \frac{10}{(2s+1)(3s+1)} \tag{40}$$

mezní aperiodický člen 2. řádu

$$G_{22}(s) = \frac{10}{(3s+1)(3s+1)} \tag{41}$$

proporcionální systémy – příklad

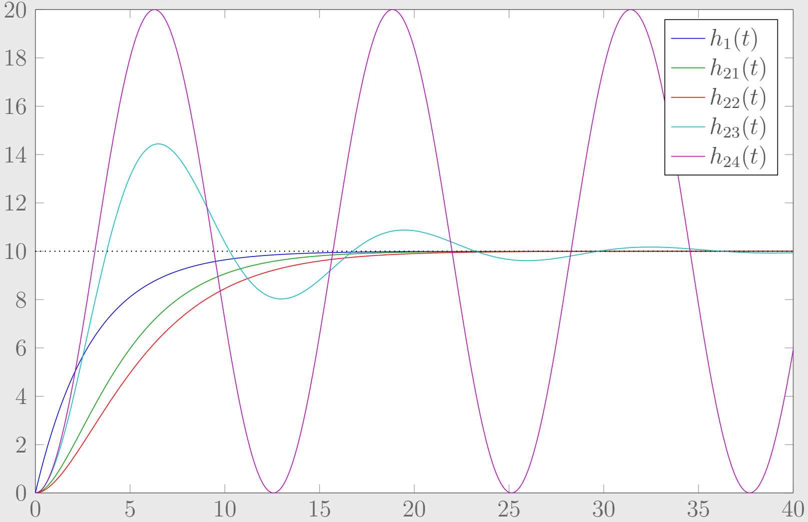
kmitavý člen 2. řádu

$$G_{23}(s) = \frac{10}{4s^2 + s + 1} \tag{42}$$

konzervativní člen 2. řádu

$$G_{24}(s) = \frac{10}{4s^2 + 1} \tag{43}$$

Proporcionální systémy – přechodová char.



Identifikace systému z tf

- Získání matematického modelu reálného objektu se nazývá **identifikace**.
- Identifikace může být **analytická** nebo **experimentální**.
- Praktické metody identifikace leží mezi těmito dvěma pohledy.
- Nalezení nejvhodnějšího způsobu předpokládá určitou intuici a praxi.

Pokud je regulovaná soustava **nekmitavá proporcionální** potom nejjednodušší metoda identifikace spočívá v určení

- doby průtahu T_u
- doby náběhu T_n

a dosazení do přenosu

Identifikace

$$G(s) = \frac{k}{T_n s + 1} e^{-T_u s} \tag{44}$$

Součet dob je doba přechodu T_p

Pro identifikaci **nekmitavých integračních** regulovaných soustav je identifikace z přechodové funkce

Identifikace z tf

$$G(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)} e^{-T_{D1} s} \tag{45}$$

případně lze použít stejné metody jako pro nekmitavé proporcionální systémy s tím rozdílem, že místo přechodových charakteristik $h(t)$ se použije jejich derivace tj. impulsní funkce.

Impulsní funkce

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \tag{46}$$

- Identifikace **kmitavé proporcionální** regulované soustavy je náročný proces.
- využití přechohodvé a impulsní charakteristiky
- zjednodušeně...

Kmitavá soustava

$$G(s) = \frac{k}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s \ + 1} e^{-T_D s} \qquad (47)$$

Bloková algebra

- Přenos systému umožňuje vyjádřit vztah mezi obrazem vstupní a výstupní veličiny.
- V praxi se většinou setkáme se složitějšími systémy, které se dají rozložit na spojení elementárních členů.
- Pro vyjádření vazeb používáme bloková schémata
- Pravidla podle nichž vytváříme přenos celku z dílčích přenosů jednotlivých členů, nazýváme **blokovou algebrou**.

- každý člen je znázorněn blokem představujícím jeho dynamické vlastnosti
- vstup do bloku je označen čarou se šipkou směřující do bloku
- výstup z bloku je označen čarou se šipkou směřující z bloku
- v praxi používáme schémata s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou pro každý blok

existují 3 základní zapojení:

- sériové
- paralelní
- antiparalelní (zpětnovazební)

Při skládání bloků uvažujeme, že se navzájem v místech vazeb neovlivňují. To může být u reálných systémů jinak.

Sériové zapojení

výstupní veličina předcházejícího členu je vstupní veličinou následujícího

Přenos sériového zapojení

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \tag{48}$$

obecně

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) ... G_n(s) \tag{49}$$

Paralelní zapojení

máme jednu vstupní veličinu pro všechny členy a výstupní veličiny jednotlivých bloků se sčítají

Přenos paralelního zapojení

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) \tag{50}$$

Antiparalelní zapojení

výstupní veličina zapojení vede zpět na vstup, kde se odečítá (nebo přičítá) od vstupního signálu

Přenos antiparalelního zapojení

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\frac{1}{G_1(s)} + G_2(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)} \qquad (51)$$

V čitateli je přenos tzv. přímé větve a ve jmenovateli jedna plus součin přímé větve a přenosu zpětné vazby.

Uvažovaný přenos (51) je pro **zápornou zpětnou vazbu**. Kdybychom signál na vstupu přičítali jednalo by se o **kladnou zpětnou vazbu**.

Přenos pro kladnou zpětnou vazbu

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s) \cdot G_2(s)} \tag{52}$$

přemístění místa rozvětvení (překřížené vazby), příklad...

Přenos řízení vyjadřuje závislost regulované veličiny y na žádané hodnotě w, když neuvažujeme působení poruchové veličiny.

Přenos řízení

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_S(s) \cdot G_R(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \qquad (53)$$

kde

$$G_0(s) = G_S(s) \cdot G_R(s) \qquad (54)$$

je **přenos rozpojeného obvodu**

Závislost regulované veličiny y na poruchové veličině v, když nepůsobí žádaná hodnota $(w = 0)$ vyjadřujeme **přenosem poruchy**.

Přenos poruchy

$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_0(s)} \qquad (55)$$

Přenos řízení i přenos poruchy mají ve jmenovateli stejný výraz $1 + G_0(s)$, který se jako **charakteristická rovnice regulačního obvodu** používá k zjišťování stability.

Charakteristická rovnice regulačního obvodu

$$1 + G_0(s) = 0 \tag{56}$$

- **Regulátor** je zařízení které provádí **regulaci**
- Regulátor působí na regulovanou soustavu prostřednictvím **akční veličiny** tak, aby se regulovaná veličina udržovala na předepsané hodnotě a **regulační odchylka** byla nulová (nebo co nejmenší).
- vlivem poruchy v dojde ke změně regulované veličiny. Není-li shoda mezi požadovanou hodnotou v a regulovanou veličinou y vznikne regulační odchylka $e = w - y$.
- pokud je regulační odchylka nulová, je regulátor bez funkce – na vstupu je nula

Regulátor není jeden prvek, skládá se z:

- **měřicí člen** (čidlo, snímač)
- **ústřední člen**
- **akční člen** (pohon, servomotor)

měřicí člen

- zjišťuje skutečnou hodnotu regulované veličiny
- u elektrických regulátorů ji převádí na elektrické napětí a vytváří regulační odchylku
- skládá se z
  - převodníku řídicí veličiny
  - snímače s převodníkem řízené veličiny
  - porovnávacího členu
- regulační obvod nemůže regulovat přesněji než je přesnost čidla

ústřední člen

- zpracovává regulační odchylku
- může ji zesilovat, integrovat, derivovat
- jako **regulátor** se často v užším slova smyslu označuje právě ústřední člen
- hledáme u něj takové parametry, které zajistí vyhovující vlastnosti celého obvodu

akční člen

- skládá se z pohonu a regulačního orgánu
- pohon dodává energii regulačnímu orgánu
- regulační orgán přímo ovládá akční veličinu
- u regulačního orgánu požadujeme lineární závislost mezi polohou pohonu a akční veličinou

Pro zjednodušení blokového schématu zahrnujeme přenos čidla do přenosu regulované soustav, stejně tak přenos pohonu regulačního orgánu (pokud se nedají zanedbat).

Nejpoužívanější model regulátoru je **PID regulátor**, který se skládá ze 3 dílčích teoretických regulátorů

- P – proporcionální
- I – integrační
- D – derivační

Regulátor může regulační odchylku zesilovat, integrovat nebo derivovat (případně skoro libovolná kombinace).

Nejjednodušší příklad regulátoru je proporcionální regulátor. Ten pouze zesiluje. Akční veličina je úměrná regulační odchylce.

Proporcionální regulátor

$$u(t) = r_0 \cdot e(t) \tag{57}$$

Akční veličina je úměrná integrálu regulační odchylky

Integrační regulátor

$$u(t) = r_{-1} \cdot \int e(t)dt \qquad (58)$$

Akční veličina je přímo úměrná derivaci regulační odchylky. Čistě derivační regulátor je technicky nerealizovatelný – hovoříme o ideálním derivačním regulátoru:

Ideální derivační regulátor

$$u(t) = r_1 \cdot e'(t) \tag{59}$$

samostatně se nikdy nevyskytuje

Proporcionálně-integrační regulátor

$$u(t) = r_0 \cdot e(t) + r_{-1} \cdot \int e(t)dt \tag{60}$$

Proporcionálně-derivační regulátor

$$u(t) = r_0 \cdot e(t) + r_1 \cdot e'(t) \tag{61}$$

- Nejznámější forma je zapojení všech tří regulátorů dohromady.
- Pokud dosadíme za některou z konstant r_0, r_{-1} nebo r_1 nulu dostaneme předchozí možné formy.

Proporcionálně-integračně-derivační regulátor

$$u(t) = r_0 \cdot e(t) + r_{-1} \cdot \int e(t)dt + r_1 \cdot e'(t) \tag{62}$$

Laplaceovou transformací získáme přenos ideálního a skutečného regulátoru

Přenos ideálního PID regulátoru

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s \tag{63}$$

Přenos skutečného PID regulátoru

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s}{1 + T_1 s \ + T_2 s^2 + \ldots} \tag{64}$$

- Konstanty r_0, r_{-1} a r_1 určují vliv jednotlivých složek na tvorbu výsledné akční veličiny.
- Jejich nastavením zajišťujeme nastavení regulátoru pro splnění požadavků na regulaci

Dvě základní architektury vzniknou kombinací jednotlivých regulátorů do struktury

- paralelní
- sério-paralelní

Přenos paralelní architektury

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s \tag{65}$$

Přenos sério-paralelní architektury

$$G_R(s) = r_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_{-1}} s} + \frac{r_1}{r_0} s\right) = r_0 \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \tag{66}$$

Ekvivalence převodu par. a sério-par. zapojení

$$r_0 = r_0 \tag{67}$$

$$r_{-1} = \frac{r_0}{T_i} \tag{68}$$

$$r_1 = r_0 \cdot T_d \tag{69}$$

- r_0 je bezrozměrná proporcionální konstanta nazývaná **zesílení regulátoru**.
- T_i je **integrační časová konstanta regulátoru** v sekundách.
- T_d je **derivační časová konstanta regulátoru** v sekundách.

Místo zesílení r_0 se často používá pojem **pásmo proporcionality**, které je udáváno v procentech. Udává o kolik procent z celého rozsahu se musí změnit vstupní signál regulátoru, aby se výstup změnil v celém rozsahu.

vztah mezi pp a r_0

$$pp = \frac{1}{r_0} \cdot 100 \tag{70}$$

P regulátor

- jednoduchý a snadno realizovatelný
- přímá úměra – čím větší regulační odchylka, tím větší je akční zásah
- čím větší je r_0, tím důraznější a rychlejší je regulace
- nevýhodou je trvalá regulační odchylka
- není vhodný pro regulaci soustav vyššího řádu a pro soustavy s dopravním zpožděním

I regulátor

- dokáže zcela eliminovat regulační odchylku při řízení proporcionálních soustav
- nevýhodou je zhoršení stability regulačního obvodu
- použití samostatně je minimální, nejčastěji ve spojitosti s P jako PI regulátor
  - Integrační složka úplně odstraňuje regulační odchylku
  - Proporcionální složka zkracuje dobu trvání regulačního pochodu
- vhodný pro soustavy s dopravním zpožděním
- pro soustavy vyšších řádů lépe v kombinaci s P

D regulátor

- samostatně se nevyskytuje – neschopnost reagovat na konstantní odchylku a zesilování šumu
- jako PD je ho možné použít tam kde P s výhodou větší rychlosti regulace
- jako PID je vhodný tam kde vyhovuje PI – výhodou je opět rychlost

Stabilita

Regulační obvod je stabilní, jestliže po svém vychýlení z rovnovážného stavu a odstranění vzruchu, který vychýlení způsobil, je schopen se ustálit v rovnovážném stavu.

Rozlišujeme tři základní stavy

- stabilní
- na hranici stability
- nestabilní

Přenos řídicí veličiny

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} \quad (71)$$

Přenos poruchy

$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{c_m s^m + \ldots + c_1 s + c_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} \quad (72)$$

Pravá strana rovnice je modifikována podle toho která z veličin (w nebo v) regulační pochod vyvolala

dif. rovnice regulačního obvodu

$$a_n y^n + ... + a_1 y' + a_0 y = \begin{cases} b_m w^{(m)} + ... + b_1 w' + b_0 w \\ c_m v^{(m)} + ... + c_1 v' + c_0 v \end{cases} \qquad (73)$$

Přechodný děj pří změnách (w nebo v) je dán řešením těchto rovnic a toto řešení se skládá ze dvou částí

průběh regulované veličiny y

$$y(t) = y_{hom}(t) + y_{part}(t) \tag{74}$$

Z hlediska stability nás zajímá pouze první část řešení dif. rovnice a to y_{hom}.

obecná podmínka stability

Regulační obvod je stabilní jestliže řešení homogenní rovnice

$$a_n y^n + ... + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{75}$$

se s rostoucím časem blíží k nule

$$\lim_{t \to \infty} y_{hom}(t) = 0 \tag{76}$$

a nestabilní jestliže řešení neomezeně roste

$$\lim_{t \to \infty} y_{hom}(t) = \infty \tag{77}$$

když ani neroste ani neklesá je na hranici stability

Řešení homogenní dif. rovnice získáme tak, že nejdříve napíšeme charakteristickou rovnici k dané diferenciální rovnici a určíme její kořeny $(s_1, ..., s_n)$

Charakteristická rovnice

$$a_n s^n + ... + a_1 s + a_0 = 0 \tag{78}$$

jsou-li tyto kořeny všechny různé (nenásobné) je řešení dif. rovnice (75)

Řešení dif. rovnice

$$y = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + ... + c_n e^{s_n t} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t} \tag{79}$$

kdy je potom následující rovnice rovna nule?

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} y &= \lim_{t\to\infty} (c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + ... + c_n e^{s_n t}) \\ &= c_1 \lim_{t\to\infty} e^{s_1 t} + c_2 \lim_{t\to\infty} e^{s_2 t} + ... + c_n \lim_{t\to\infty} e^{s_n t} \end{aligned} \tag{80}$$

Tato limita je rovna nule a regulační obvod je stabilní, jestliže všechny kořeny charakteristické rovnice $s_1, ..., s_n$ **jsou záporná čísla**

Jestliže má char. rovnice (75) některý kořen komplexní musí mít k němu i komplexně sdružený. Řešení dif. rovnice má potom tvar

Řešení dif. rovnice

$$y = ... + e^{at}(c_k \sin bt + c_{k+1} \cos bt) + ... \tag{81}$$

to je tzv. kmitavá část řešení. Aby byla splněna podmínka z (76) musí být reálná část komplexně sdružených kořenů záporná.

Základní nutná a postačující podmínka stability regulačního obvodu je potom

podmínka stability

Regulační obvod je stabilní, mají-li všechny kořeny charakteristické rovnice záporné reálné části neboli leží v levé komplexní polorovině

Charakteristická rovnice charakterizuje nejdůležitější vlastnosti regulačního obvodu

char. rovnice přenosu řízení a poruchy

$$1 + G_0(s) = 0 \tag{82}$$

příklad...

rozložíme-li charakteristickou rovnici (78) na součin kořenových činitelů

součin kořenových činitelů

$$a_n(s - s_1)(s - s_2)...(s - s_n) = 0 \tag{83}$$

Pokud jsou všechny kořeny záporné (nebo komplexní se záp. reál. částí) jsou v tomto součinu pouze kladná znaménka

Stodolova podmínka

Aby byl regulační obvod stabilní, musí být všechny koeficienty charakteristické rovnice kladné. Tato podmínka je nutná (ale nepostačující).

Pokud máme charakteristickou rovnici (78) druhého stupně, tedy kvadratickou, je předcházející podmínka nutná a postačující.

Je-li char. rovnice vyššího než druhého stupně a jsou-li její koeficienty kladné (nutná podmínka) nelze o stabilitě přímo rozhodnout. Je nutné spočítat kořeny – obecná podmínka stability.

Vyčíslování kořenů charakteristické rovnice vyššího než druhého stupně je pracná záležitost. Proto byla sestavena matematická kritéria pro určení zda mají kořeny zápornou reálnou část a tím ověřit stabilitu obvodu.

- algebraická
  - **Hurwitzovo** – kladnost determinantů
  - **Routh-Schurovo** – snižování stupně charakteristické rovnice
- frekvenční
  - **Michajlov-Leonhardovo** – křivka $H(j\omega)$
  - **Nyquistovo** – frekvenční charakteristika rozpojeného obvodu $G_0(j\omega)$

Charakteristická rovnice

$$a_n s^n + ... + a_1 s \ + a_0 = 0 \tag{84}$$

Hurwitzovo kritérium

Obvod je stabilní, když determinant H_n a všechny subdeterminanty H_{n-1} až H_2 jsou kladné. Je-li některý z determinantů záporný, je obvod nestabilní. Je-li některý nulový, je obvod na mezi stability.

Hurwitzova matice

$$H_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \times \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \times \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \times & \times & \cdots & \times \end{vmatrix} \tag{85}$$

příklad pro

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{86}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 \tag{87}$$

kritérium pro vyšší stupně

stupeň char. rovnice	nutná podm.	další nutná podm.
2	kladnost koef.	-
3	kladnost koef.	$H_2 > 0$
4	kladnost koef.	$H_3 > 0$
5	kladnost koef.	$H_4 > 0; H_2 > 0$

Vychází opět z charakteristické rovnice (78). Provádíme postupnou redukci stupně charakteristické rovnice až k rovnici druhého stupně.

Routh-Schurovo kritérium

Regulační obvod je stabilní, když jsou koeficienty všech rovnic při postupné redukci charakteristické rovnice kladné. Pokud se při redukci vyskytne v rovnici záporný koeficient, můžeme výpočet ukončit – obvod je nestabilní.

Routh-Schurovo kritérium stability

1. napíšeme koeficienty redukované (charakteristické) rovnice do řádku od nejvyšší mocniny k nejnižší.
2. podtrhneme sudé koeficienty v pořadí
3. každý podtržený koeficient násobíme podílem dvou nejvyšších koeficientů a_n/a_{n-1} a výsledek napíšeme do druhého řádku posunutý o jedno místo vlevo
4. druhý řádek (který má členy vždy ob jeden prvního řádku) odečteme od prvého řádku a dostaneme třetí řádek
5. koeficienty třetího řádku jsou koeficienty rovnice o jeden stupeň nižší, než byla původní rovnice, neboť na místě nejvyššího koeficientu jsme dostali nulu
6. redukci provádíme tímto způsobem dále až na rovnici 2. stupně. Nulu na začátku řady koeficientů neuvažujeme. Koeficienty u všech redukovaných rovnic musí být kladné. To je podmínka stability.

Frekvenční kritérium vycházející opět z charakteristické rovnice obvodu. Kritérium hodnotí stabilitu podle křivky kterou opíše koncový bod char. polynomu $H(j\omega)$ v komplexní rovině při změně frekvence ω od 0 do ∞. Polynom $H(j\omega)$ vznikne z char. funkce dosazením $s = j\omega$.

Char. polynom v $\mathbb{C}$

$$H(j\omega) = a_n(j\omega)^n + ... + a_1(j\omega) + a_0 \tag{88}$$

Michajlov-Leonhardovo kritérium stability

Aby byl regulační obvod stabilní, musí Michajlov-Leonhardova křivka $H(j\omega)$ začínat na kladné reálné poloose komplexní roviny a se vzrůstajícím ω od 0 do ∞ musí projít postupně (tj. v pořadí) v kladném smyslu (proti pohybu hodinových ručiček) tolika kvadranty, kolikátého stupně je charakteristická rovnice.

- Založeno na znalosti průběhu frekvenční charakteristiky rozpojeného obvodu.
- Může být použito i pro obvody s dopravním zpožděním kde nelze použít algebraických kritérií.
- stačí experimentálně získaná frekvenční charakteristika
- zkoumá stabilitu z kvalitativního hlediska (jak dalece je stabilní)

Přenos rozpojeného obvodu

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = \frac{M_0(s)}{N_0(s)} \tag{89}$$

Nyquistovo kritérium stability

Regulační obvod je stabilní jestliže kritický bod $[-1, 0]$ leží vlevo od frekvenční charakteristiky rozpojeného obvodu $G_0(j\omega)$ pro frekvence ω od 0 do ∞.

Prochází-li frekvenční charakteristika $G_0(j\omega)$ bodem $[-1, 0]$, je obvod na hranici stability.

Omezením je, že toho kritérium lze použít pouze je-li rozpojený obvod stabilní nebo na mezi stability. Jmenovatel přenos rozpojeného obvodu N_0 nesmí obsahovat kladné kořeny.

Nyquistovo kritérium stability v log. souřadnicích

Regulační obvod je stabilní, jestliže pro frekvenci, při které logaritmická amplitudová frekvenční charakteristika rozpojeného obvodu $G_0(j\omega)$ protíná osu 0 [dB] je $\varphi > -180°$.